1Г

УДК 519.7

И.С. Грунский, С.В. Сапунов
Государственный университет информатики и искусственного интеллекта,
г. Донецк, Украина
Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк, Украина
grunsky@iamm.ac.donetsk.ua, sapunov_sv@iamm.ac.donetsk.ua

Диагностика местоположения мобильного робота на основе топологической информации о среде

Рассматривается задача определения автономным мобильным роботом (МР) своего положения в среде, моделируемой графом с помеченными вершинами. МР считывает метки текущей вершины и ее окрестности. Он может перемещаться по ребрам графа от вершины к вершине, оставлять маркер в текущей вершине, а также обнаруживать и подбирать маркер в случае его нахождения в текущей вершине. В работе предложены полиномиальные методы построения и реализации экспериментов по распознаванию начального положения МР, т.е. начальной вершины графа. Эти методы основаны на проверке изоморфизма подграфов, порожденных предполагаемыми начальными вершинами.

Введение

Интерес к взвешенным (помеченным) графам (т.е. графам с помеченными элементами – вершинами, дугами, инциденторами и т.д.) вызван развитием теории формальных языков и конечных автоматов [1], [2]. Результаты исследований таких графов широко используются в прикладных областях. В частности помеченные графы оказались удобным средством для исследования топологических операционных сред мобильных агентов (роботов, поисковых программ и т.д.) [3]. При планировании навигации мобильных агентов (МА) возникают три взаимосвязанные фундаментальные задачи: задача построения модели неизвестной среды (exploration), задача определения положения робота в известной среде (robot selflocation) и задача проверки соответствия неизвестной среды и ее модели (карты) (map validation) [4]. В теории автоматов имеются соответствующие аналоги для этих задач [5]. В ряду этих задач центральное положение занимает задача самолокализации, т.к. от ее решения зависит решение двух других. Формулируется она следующим образом: МА, обладая картой (помеченным графом) среды, должен установить соответствие между вершиной на карте и неизвестной ему априори областью среды, в которой он первоначально находился.

В данной работе в качестве топологической модели операционной среды рассматриваются конечные неориентированные графы. Вершины этих графов заранее помечены и МА не меняет эти метки. Такая модель возникает, например, при качественной навигации МА (qualitative navigation) [6].

Ранее автором был предложен ряд алгоритмов и методов решения задачи самолокализации, опирающихся на использование конечных множеств слов в алфавите меток, которые отличат одну вершину графа от всех других его вершин (т.н. идентификаторов вершин) [8,] [9].

В данной работе авторами предлагается помимо лингвистической информации использовать также топологическую информацию о графе. Продуктивность такого подхода демонстрирует следующий пример.

Рассмотрим граф G, состоящий из двух компонент G' и G'' (рис. 1). В [8] показано, что МА, установленному, например, в вершину 1 графа G для того, чтобы отличить начальную вершину от всех других вершин, достаточно пройти путь, помеченный последовательностью меток $adabcadabcadabcad$. С другой стороны, легко видеть, что только для вершины 1 путь, помеченный последовательностью меток $abca$, образует цикл. Поэтому для отделения этой вершины от всех других вершин достаточно проверить наличие такого цикла.

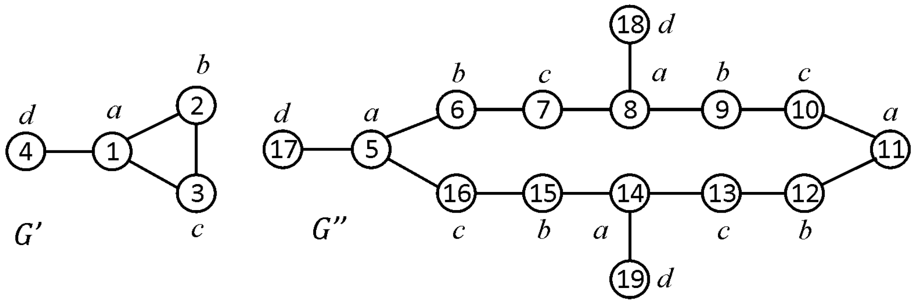


Рисунок 1

Целью данной работы является изложение метода проведения диагностических экспериментов с графами путем анализа их подграфов.

Постановка задачи

Рассматривается задача определения МА своего местоположения в среде. Среда моделируется конечным графом, вершинам которого приписаны метки из некоторого конечного алфавита. МА устанавливается в произвольную вершину известного ему графа среды. Находясь в вершине, МА считывает ее метку и метки смежных с ней вершин. МА может перемещаться по ребрам графа от вершины к вершине, оставлять маркер в текущей вершине, а также обнаруживать и подбирать маркер в случае его нахождения в текущей вершине. Задача МА заключается в определении начальной вершины, т.е. отличении этой вершины от всех других вершин.

Основные определения

Конечным графом с помеченными вершинами (помеченным графом) назовем четверку $G=(V,E,M,\mu)$, где V – конечное множество вершин, $|V|=n$, $E\subseteq V\times V$ – конечное множество ребер, M – конечное множество (алфавит) меток вершин, $|M|=m$, $\mu:V\to M$ – сюръективная функция разметки. Последовательность меток вершин $w=\mu(g_1)\mu(g_2)\ldots\mu(g_k)$, соответствующую пути $g_1g_2\ldots g_k$ в графе G, назовем словом длины $d(w)=k$, порожденным вершиной $g_1\in V$. Инверсией слова $w=x_1x_2\ldots x_{k-1}x_k$ будем называть слово $w^{rev}=x_kx_{k-1}\ldots x_2x_1$. Обозначим через M^+ множество всех непустых слов в алфавите M. Для всякого $W\subseteq M^+$ высотой W назовем наибольшую из длин входящих в него слов, его кратностью – величину $|W|$, его объемом – сумму длин

всех входящих в него слов. Введем частичную операцию $*: V \times M^+ \to 2^V$ соотношением: для любой вершины $g \in V$ и любого слова $w \in M^+$ через $g \times w$ обозначим множество всех вершин $h \in V$, таких, что из g в h существует путь, помеченный словом w. Для слов $u, w \in M^+$ введем их композицию $u \circ w$, равную $u\,w'$, если $u = u'x$, $w = x\,w'$, $x \in M$, и не определено в противном случае. Для слов $u, w \in M^+$ через $u\,w$ или $u \cdot w$ будем обозначать их конкатенацию.

Языком L_g вершины $g \in V$ назовем множество всех слов, порожденных этой вершиной. Будем говорить, что вершины $g, h \in V$ ε-неотличимы, если $L_g = L_h$.

Простой неориентированный помеченный граф G назовем сильно детерминированным графом или СД-графом, если для любой вершины $g \in V$ и любых смежных с ней вершин s и t из $s \neq t$ следует, что $\mu(s) \neq \mu(t)$. Из этого определения следует, что для любой вершины g СД-графа G и любого слова $w \in M^+$ выполняется $|g \times w| \leq 1$, где $|g \times w| = 1$, если $w \in L_g$, и $|g \times w| = 0$ в противном случае. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются только СД-графы.

Под детерминизацией помеченного графа будем понимать многократное применение следующей операции: если в множестве преемников некоторой вершины оказываются одинаково помеченные вершины, то такие вершины отождествляются с заменой возникающих кратных дуг одной дугой.

Пусть $G_g = (V, E, M, \mu, g)$ и $G_h = (V', E', M, \mu', h)$ – инициально-связные помеченные графы. Гомоморфизмом графа G_g в граф G_h называется такое отображение $f: V \to V'$, для которого: 1) $f(g) = h$; 2) $\mu(t) = \mu'(f(t))$ для всех $t \in V$; 3) для любой дуги $e = (t_1, t_2) \in E$ существует дуга $e' = (f(t_1), f(t_2)) \in E'$. Если такое отображение существует, то будем говорить, что граф G_g гомоморфно вкладывается в граф G_h. Если $f^{-1}: V' \to V$ является гомоморфизмом графа G_h в граф G_g, то f называют изоморфизмом графов G_g и G_h, а графы G_g и G_h – изоморфными, что записывают в виде $G_g \cong G_h$.

Неотличимость вершин

Пусть $G = (V, E, M, \mu)$ – помеченный граф. Подграфом графа G назовем граф $S = (V_S, E_S, M, \mu_S)$ такой, что: 1) $V_S \subseteq V$; 2) $E_S \subseteq E \cap (V_S \times V_S)$; 3) μ_S является сужением μ на множество V_S. Мы будем использовать обозначение $S \subseteq G$ для обозначения того, что S является подграфом G. Подграф S графа G называется подграфом, порожденным множеством вершин $V_S \subseteq V$, если $E_S = E \cap (V_S \times V_S)$. Через S_g обозначим подграф графа G, порожденный всеми вершинами, достижимыми из вершины $g \in V$. Таким образом, S_g является инициально-связным помеченным графом с выделенной вершиной g.

Инъективная функция $f: V' \to V$ называется изоморфным вложением графа G_h в граф G_g, если существует подграф $S_g \subseteq G_g$, такой, что f является изоморфизмом графа G_h в граф S_g. Будем говорить, что вершины $g, h \in V$ σ-неотличимы и писать $(g, h) \in \sigma$, если $S_g \cong S_h$.

Из определения языка вершины помеченного графа следует, что $S_g \cong S_h$ влечет $L_g = L_h$. Иными словами, из $(g,h) \in \sigma$ следует $(g,h) \in \varepsilon$, что означает $\sigma \subseteq \varepsilon$. Пример на рис. 2 показывает, что обратное включение не выполняется.

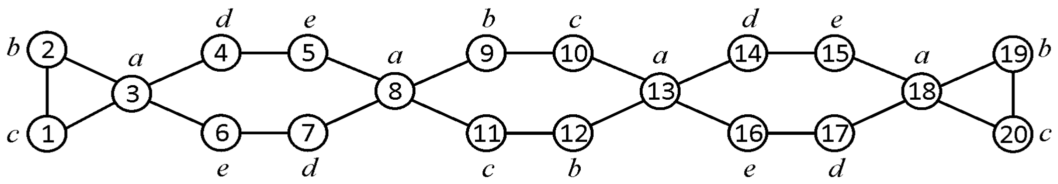


Рисунок 2

Действительно, в связном СД-графе на этом рисунке $L_3 = L_8$ (метод проверки равенства языков смотри в [7]), но $S_3 \ncong S_8$. Таким образом, ε порождает более грубое разбиение множества V, чем σ. Очевидно, что равенство $\sigma = \varepsilon$ выполняется для приведенных графов. Действительно, по определению приведенного графа G для любых вершин $g,h \in V$ выполняется $L_g \neq L_h$. Пусть слово $w \in L_g \setminus L_h$. Тогда существует путь из вершины g, помеченный словом w, и не существует пути из вершины h с меткой w. Следовательно, $S_g \ncong S_h$.

Представление графов

Представляющей парой (ПП) инициально-связного помеченного графа G_g назовем пару $\left(T\left(G_g\right), C\left(G_g\right)\right)$, где $T\left(G_g\right)$ – корневое остовное дерево графа G_g с корнем в вершине g, а $C\left(G_g\right)$ – множество всех инициальных подграфов графа G_g, каждый из которых образован двумя унарными корневыми поддеревьями дерева $T\left(G_g\right)$ и хордой, соединяющей их листья. Ясно, что в случае, когда граф G_g является деревом, $G_g \cong T\left(G_g\right)$ и $C\left(G_g\right) = \varnothing$.

Прямой суммой помеченных графов G и H назовем помеченный граф $G + H$, полученный объединением множеств вершин и ребер этих графов (с предварительным переобозначением вершин так, чтобы исходные графы не имели общих вершин). Пусть G_g и H_h являются инициально-связными помеченными графами и $\mu_G(g) = \mu_H(h)$. Соединением G_g и H_h назовем инициально-связный помеченный граф $\left\langle G_g + H_h \right\rangle$, полученный из графов G_g и H_h отождествлением их начальных вершин и последующей детерминизацией.

Теорема 1. Для любой ПП $\left(T\left(G_g\right), C\left(G_g\right)\right)$ инициально-связного помеченного графа G_g существует изоморфизм $\left\langle T\left(G_g\right) + \sum_{C \in C\left(G_g\right)} C \right\rangle \cong G_g$.

Доказательство. Если граф G_g является деревом, то справедливость теоремы очевидна. Пусть G_g не является деревом. Покажем, что граф $\left\langle T\left(G_g\right) + \sum_{C \in C\left(G_g\right)} C \right\rangle$ изоморфен графу G_g. Вершины графа $\left\langle T\left(G_g\right) + \sum_{C \in C\left(G_g\right)} C \right\rangle$ будем обозначать строч-

ными буквами t_i, а через t_0 обозначим его инициальную вершину. Из определения графа $\left\langle T\left(G_g\right)+\sum_{C\in C\left(G_g\right)}C\right\rangle$ следует, что существует взаимно однозначное отображение φ графа $\left\langle T\left(G_g\right)+\sum_{C\in C\left(G_g\right)}C\right\rangle$ на граф G_g, такое, что $\varphi\left(t_0\right)=g$ и для любого пути $t_0\,t_1\ldots t_k$ по ветви дерева $T\left(G_g\right)$ последовательность вершин $\varphi\left(t_0\right)\varphi\left(t_1\right)\ldots\varphi\left(t_k\right)$ является путем по графу G_g, причем метки этих путей совпадают. Пусть $\left(t_i,t_j\right)$ – ребро графа $\left\langle T\left(G_g\right)+\sum_{C\in C\left(G_g\right)}C\right\rangle$. Если $\left(t_i,t_j\right)$ принадлежит $T\left(G_g\right)$, то $\left(\varphi\left(t_i\right),\varphi\left(t_j\right)\right)$ является ребром графа G_g. Если $\left(t_i,t_j\right)$ является хордой $T\left(G_g\right)$, то, по определению множества $C\left(G_g\right)$, ребро $\left(t_i,t_j\right)$ принадлежит одному из графов $C\in C\left(G_g\right)$. Тогда $\left(\varphi\left(t_i\right),\varphi\left(t_j\right)\right)$ является ребром графа G_g. Следовательно, $\left\langle T\left(G_g\right)+\sum_{C\in C\left(G_g\right)}C\right\rangle\subseteq G_g$. Пусть $\left(g_i,g_j\right)$ – ребро графа G_g. Если $\left(g_i,g_j\right)$ принадлежит $T\left(G_g\right)$, то $\left(\varphi^{-1}\left(g_i\right),\varphi^{-1}\left(g_j\right)\right)$ является ребром графа $\left\langle T\left(G_g\right)+\sum_{C\in C\left(G_g\right)}C\right\rangle$. Если $\left(g_i,g_j\right)$ является хордой $T\left(G_g\right)$, то, по определению множества $C\left(G_g\right)$, ребро $\left(g_i,g_j\right)$ принадлежит одному из графов $C\in C\left(G_g\right)$. Тогда $\left(\varphi^{-1}\left(g_i\right),\varphi^{-1}\left(g_j\right)\right)$ является ребром графа $\left\langle T\left(G_g\right)+\sum_{C\in C\left(G_g\right)}C\right\rangle$. Следовательно, $G_g\subseteq\left\langle T\left(G_g\right)+\sum_{C\in C\left(G_g\right)}C\right\rangle$. Таким образом, $\left\langle T\left(G_g\right)+\sum_{C\in C\left(G_g\right)}C\right\rangle\cong G_g$. Что и требовалось доказать.

Из определения СД-графа следует, что всякому пути из вершины такого графа соответствует единственное слово из языка этой вершины, являющееся меткой этого пути. Поэтому всякую ПП $\left(T\left(G_g\right),C\left(G_g\right)\right)$ графа G_g можно представить в виде пары множеств $\left(\mathrm{T}\left(G_g\right),\mathrm{C}\left(G_g\right)\right)$, где $\mathrm{T}\left(G_g\right)$ – множество всех слов, являющихся метками простых путей из корня дерева $T\left(G_g\right)$ во все его вершины, $\mathrm{C}\left(G_g\right)$ – множество всех неупорядоченных пар слов $\left(u,w\right)$ таких, что $u,w\in\mathrm{T}\left(G_g\right)$, $u\neq w$, и $g\times u\,w^{rev}=g$.

Рассмотрим метод перехода от ПП к помеченному графу. Каждому слову $w\in\mathrm{T}\left(G_g\right)$ поставим в соответствие унарное корневое дерево $T(w)$ так, чтобы w было меткой пути из корня этого дерева в его лист. Множеству $\mathrm{T}\left(G_g\right)$ поставим в соответствие корневое дерево, являющееся результатом соединения всех деревьев $T(w)$. Каждой паре $\left(u,v\right)\in\mathrm{C}\left(G_g\right)$ поставим в соответствие корневое дерево $T\left(u,v\right)$, являющееся результатом соединения унарных корневых деревьев $T\left(u\right)$ и $T\left(v\right)$. Множеству $\mathrm{C}\left(G_g\right)$ поставим в соответствие корневое дерево, являющееся результатом соединения всех деревьев $T\left(u,v\right)$. Построим соединение деревьев, соответствующих $\mathrm{T}\left(G_g\right)$ и $\mathrm{C}\left(G_g\right)$. Инициальную вершину полученного графа обозначим через t_0. Для каждой пары слов $\left(u,v\right)\in\in\mathrm{C}\left(G_g\right)$ построим ребро $\left(t_0\times u,t_0\times v\right)$. Очевидно, что полученный граф изоморфен графу G_g. Таким образом, пару $\left(\mathrm{T}\left(G_g\right),\mathrm{C}\left(G_g\right)\right)$ можно использовать для представления графа G_g наряду с парой $\left(T\left(G_g\right),C\left(G_g\right)\right)$. Поэтому пару $\left(\mathrm{T}\left(G_g\right),\mathrm{C}\left(G_g\right)\right)$ будем также называть представляющей парой графа G_g.

Зададим частичный порядок $\leq$ на множестве меток M и связанный с ним лексикографический порядок $\leq$ на множестве M^+. ПП $\left(\mathrm{T}(G_g),\mathrm{C}(G_g)\right)$ графа G_g назовем выделенной (ВПП), если множество $\mathrm{T}(G_g)$ состоит из меток кратчайших по длине и наименьших по метке путей из g во все вершины G_g. Очевидно, что кратность и высота $\mathrm{T}(G_g)$ не превосходят n. Кратность $\mathrm{C}(G_g)$ равна числу хорд остова $T(G_g)$, т.е. не превосходит n^2-n+1 [11]. Высота $\mathrm{C}(G_g)$ равна $O(n)$. Легко видеть, что ВПП графа G_g может быть построена путем обхода графа в ширину со сложностью $O(n^2)$.

Топологический идентификатор

Пусть G_g и H_h являются инициально-связными помеченными графами с выделенными вершинами g и h соответственно. Обозначим через $G_g \cap H_h$ операцию нахождения наибольшего связного подграфа $G'_g \subseteq G_g$, содержащего выделенную вершину g, такого, что G'_g изоморфно вложим в H_h, причем вершина g отображается в вершину h.

Топологическим идентификатором (ТИ) вершины $g \in V$ назовем помеченный граф D_g такой, что для любой вершины $h \in V$ изоморфизм $D_g \cap S_g \cong D_g \cap S_h$ существует тогда и только тогда, когда $(g,h) \in \sigma$.

Рассмотрим примеры топологических идентификаторов вершин помеченных графов. Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 1. Граф S_g является ТИ вершины g приведенного графа G.

Следующее утверждение демонстрирует связь между позитивными лингвистическими идентификаторами (ЛИ) вершин графа [9] и их ТИ.

Утверждение 2. Пусть W_g – позитивный ЛИ вершины g графа G. Гомоморфный образ корневого дерева $\left\langle \sum_{w\in W_g} T(w)\right\rangle$ в графе S_g является ТИ g.

Доказательство. Действительно, т.к. $W_g \subseteq L_g$, то существует гомоморфизм корневого дерева $\left\langle \sum_{w\in W_g} T(w)\right\rangle$ в граф S_g, сохраняющий метки вершин. По определению W_g, для любой вершины $h \in V \setminus \{g\}$ существует слово $w \in W_g \setminus L_h$. Тогда существует унарное корневое поддерево $T(w)$ дерева $\left\langle \sum_{w\in W_g} T(w)\right\rangle$ и его гомоморфный образ S'_g в графе S_g, такой, что $S'_g \not\subseteq S_h$. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим метод построения ПП $\left(\mathrm{T}(D_g),\mathrm{C}(D_g)\right)$ ТИ D_g вершины g графа G. Пусть для каждой вершины $h \in V$ построена ВПП $\left(\mathrm{T}(S_h),\mathrm{C}(S_h)\right)$. Для каждой вершины $h \in V$ каждой паре $(u,v) \in \mathrm{C}(S_h)$ поставим в соответствие меньшее (по $\leq$) из слов $u\,v^{rev}$ и $v\,u^{rev}$. Полученное множество слов обозначим $\widetilde{\mathrm{C}}(S_h)$. Далее, для вершины g и всех вершин $h \in V \setminus \{g\}$ отыщем меньшее (по $\leq$) среди кратчайших слов $w' \in \mathrm{T}(S_g) \oplus$ $\oplus \mathrm{T}(S_h)$ и $w'' \in \widetilde{\mathrm{C}}(S_g) \oplus \widetilde{\mathrm{C}}(S_h)$, если они существуют.

Основная идея метода диагностики положения МА из следующего подраздела состоит в исследовании подграфов, порожденных вершинами, удаленными от исходной на расстояние не превосходящее k, где k пробегает значения от 1 до n. Поэтому принимать решение о помещении слова в ВПП ТИ будем исходя из следующих соображений: если $d(w') < \lceil d(w'')/2 \rceil$, то w' помещаем в $\mathrm{T}(D_g)$, иначе w'' помещаем в $\tilde{\mathrm{C}}(D_g)$.

Алгоритм 1. *Построение ТИ вершины графа.*

Вход. ВПП $(\mathrm{T}(S_h), \mathrm{C}(S_h))$ всех вершин $h \in V$.

Выход. ПП ТИ вершины $g \in V$.

Метод.

1. Положить $Q = V$, $\mathrm{T}(D_g) = \varnothing$, $\tilde{\mathrm{C}}(D_g) = \varnothing$.

2. Выбрать вершину $g \in Q$.

3. Положить $Q = Q \setminus \{g\}$, $\mathrm{T}(D_g) = \mathrm{T}(D_g) \cup \{\mu(g)\}$.

4. Удалить из Q все вершины h, для которых $\mu(h) \neq \mu(g)$.

5. Если $Q = \varnothing$, то пара $(\mathrm{T}(D_g), \tilde{\mathrm{C}}(D_g))$ уже построена. Пополним множество $\mathrm{T}(D_g)$ объединением собственных начальных отрезков всех входящих в него слов. Каждое слово $w \in \tilde{\mathrm{C}}(D_g)$ заменить соответствующей ему парой слов (u, v) и обозначить полученное множество пар через $\mathrm{C}(D_g)$. Конец работы.

6. Выбрать вершину $h \in Q$. Положить $Q = Q \setminus \{h\}$.

7. Найти кратчайшие по длине и наименьшие по $\leq$ слова $w' \in \mathrm{T}(S_g) \oplus \mathrm{T}(S_h)$ и $w'' \in \tilde{\mathrm{C}}(S_g) \oplus \tilde{\mathrm{C}}(S_h)$.

8. Если $d(w') < \lceil d(w'')/2 \rceil$, то $\mathrm{T}(D_g) = \mathrm{T}(D_g) \cup \{w'\}$. Перейти к п. 5.

9. $\tilde{\mathrm{C}}(D_g) = \tilde{\mathrm{C}}(D_g) \cup \{w''\}$. Перейти к п. 5.

Анализ алгоритма начнем со следующей теоремы.

Теорема 2. Граф D_g, построенный по алгоритму 2, является ТИ вершины g графа G.

Доказательство. Из процедуры построения графа D_g следует, что в ПП $(\mathrm{T}(D_g), \mathrm{C}(D_g))$ для любой вершины $h \in V \setminus \{g\}$ существует слово $w \in \mathrm{T}(S_g) \oplus \mathrm{T}(S_h)$ или пара слов $(u, v) \in \mathrm{C}(S_g) \oplus \mathrm{C}(S_h)$. Пусть, для определенности, $(u, v) \in \mathrm{C}(S_g)$. Из процедуры построения $\mathrm{C}(D_g)$ следует, что $h \times u v^{rev} \neq h$. Обозначим через $S(u, v)$ гомоморфный образ унарного корневого дерева $T(u v^{rev})$ в графе S_g. Ясно, что $S(u,v) \cap S_g \not\cong S(u, v) \cap S_h$. Пусть $w \in \mathrm{T}(S_g)$. Если $w \notin L_h$, то $T(w) \cap S_g \not\cong T(w) \cap S_h$. Предположим, что $w \in L_h$. Так как w является кратчайшим по длине и наименьшим по $\leq$ словом из $\mathrm{T}(S_g) \oplus \mathrm{T}(S_h)$, то всякий его собственный начальный отрезок $w' \in \mathrm{T}(S_g) \cap \mathrm{T}(S_h)$. Из процедуры построения ПП графа D_g следует, что $w \notin \mathrm{T}(S_h)$. Тогда существует слово $u \in \mathrm{T}(S_h)$, такое, что $h \times u = h \times w$ и, следовательно, $h \times w \circ u^{rev} = h$. Так как $u \in \mathrm{T}(S_h)$, то либо $d(u) = d(w) - 1$, либо $d(u) = d(w)$ и $u \leq w$.

Тогда $S\left(w\circ u^{rev}\right)\cap S_h \not\cong S\left(w\circ u^{rev}\right)\cap S_g$. Так как $\left|d\left(w\circ u^{rev}\right)/2\right|\le d(w)$, то $w\notin \mathrm{T}\left(D_g\right)$, что невозможно. Следовательно, если $w\in \mathrm{T}\left(S_g\right)\cap \mathrm{T}\left(S_h\right)$, то $w\notin L_h$.

Аналогично доказывается случай, когда $w\in \mathrm{T}\left(S_h\right)$ или $(u,v)\in \mathrm{C}\left(S_h\right)$. Что и требовалось доказать.

Оценку временной сложности Алгоритма 1 устанавливает следующее утверждение.

Теорема 3. Алгоритм 1 строит ТИ вершины g графа G за время $O\left(n^2\right)$.

Доказательство. Очевидно, что наибольших затрат времени требует 7-я строка алгоритма. Опишем подробно метод отыскания кратчайших слов. Множества $\{g\}\times \times\mathrm{T}\left(S_g\right)\cup\{h\}\times\mathrm{T}\left(S_h\right)$ и $\{g\}\times\mathrm{C}\left(S_g\right)\cup\{h\}\times\mathrm{C}\left(S_h\right)$ упорядочим по длине второй компоненты. В результате получим их разбиение на подмножества, состоящие из пар, у которых длина второй компоненты одинакова. Эти подмножества упорядочим лексикографически. Сложность такого упорядочивания имеет порядок $O\left(n^2\right)$[10]. В упорядоченных таким образом множествах $\{g\}\times\mathrm{T}\left(S_g\right)\cup\{h\}\times\mathrm{T}\left(S_h\right)$ и $\{g\}\times\mathrm{C}\left(S_g\right)\cup\{h\}\times\mathrm{C}\left(S_h\right)$ проанализируем последовательность первых компонент. Вторая компонента той пары, на которой нарушается чередование g и h, является искомым кратчайшим словом для соответствующего множества. Для такого анализа достаточно $O\left(n^2\right)$ шагов. Таким образом, сложность алгоритма 1 имеет порядок $O\left(n^2\right)$. Что и требовалось доказать.

Диагностический эксперимент

Экспериментом с графом G относительно априорной информации **I**, цели **C** и средств **S** назовем процесс, состоящий из трех этапов: 1) построение теста Р на основе **I** и **C**; 2) получение МА экспериментальных данных **W** на основе Р и **S**; 3) вывод заключений о свойствах графа на основе **W** и **I**. Априорная информация – это класс графов, к которому принадлежит G. В качестве S выступают возможности МА перемещаться по графу, воспринимать локальную информацию о вершинах и ставить в них дополнительные стираемые/нестираемые метки. Эксперимент назовем диагностическим (ДЭ), если априори полностью известен граф G и МА установлен в произвольную начальную вершину этого графа, а целью является определение этой вершины, т.е. отличие этой вершины от всех других вершин. Из определения эксперимента следует, что он осуществляется посредством прохождения МА некоторого связанного с тестом Р множества путей по графу G из начальной вершины.

Очевидно, что если граф G не приведен, то, в общем случае, невозможно однозначно определить начальную вершину и, следовательно, невозможен ДЭ с ним.

Рассмотрим метод построения диагностического теста для графа G с использованием ТИ всех его вершин. Для каждой метки $x\in M$ построим граф $D_x=\left(V',E',M,q_0,\mu'\right)$ такой, что $\mathrm{T}\left(D_x\right)=\bigcup\limits_{\mu(g)=x}\mathrm{T}\left(D_g\right)$ и $\mathrm{C}\left(D_x\right)=\bigcup\limits_{\mu(g)=x}\mathrm{C}\left(D_g\right)$. Обозначим через D граф, являющийся прямой суммой всех графов D_x. Очевидно, что для любых $g,h\in V$ выполняется $D\cap S_g\not\cong D\cap S_h$. Действительно, из $\mathrm{T}\left(D_g\right)\subseteq\mathrm{T}(D)$ и $\mathrm{C}\left(D_g\right)\subseteq\mathrm{C}(D)$ следует, что $D_g\subseteq D$. Тогда по определению ТИ $D_g\cap S_g\not\cong D_g\cap S_h$, а следовательно, $D\cap S_g\not\cong D\cap S_h$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Граф D является диагностическим тестом для графа G для любого множества ТИ $\{D_g\}_{g\in V}$.

Эта теорема дает метод построения диагностических тестов для СД-графов.

Стратегия получения экспериментальных данных заключается в том, что МА, стартуя из неизвестной ему вершины h графа G, проверяет наличие/отсутствие в G путей, помеченных словами из ПП графа D_x, где $x = \mu(h)$. В зависимости от исхода каждой из таких проверок количество претендентов на роль начальной вершины может быть только уменьшено. В основу алгоритма положен метод обхода графа в ширину [10]. С вершиной q_0 свяжем множество вершин $Q_x = V \times x$, где $x \in M$ (т.е. всех вершин с меткой x). Для каждого слова $w \in \mathrm{T}(D_x)$ с вершиной $q = q_0 \times w$ свяжем два множества $Q(q) = \{g \in Q_x \mid w \in \mathrm{T}(S_g)\}$ и $\widetilde{Q}(q) = \{g \in Q_x \mid w \notin \mathrm{T}(S_g)\}$. Пусть (q', q'') – произвольная хорда остова $T(D_x)$. Обозначим через w' и w'' слова из $\mathrm{T}(D_x)$, в т.ч. $q_0 \times w' = q'$ и $q_0 \times w'' = q''$. С каждой хордой (q', q'') свяжем три множества: 1) $Q(q', q'')$ состоит из всех вершин $g \in Q_x$, в т.ч. $g \times w'(w'')^{rev} = g$; 2) $\widetilde{Q}(q', q'')$ состоит из всех вершин $g \in Q_x$, в т.ч. $g \times w'\mu'(q'') \neq \varnothing$ и $g \times w'\mu'(q'') \circ (w'')^{rev} \neq g$; 3) $\hat{Q}(q', q'')$ состоит из всех вершин $g \in Q_x$, в т.ч. $g \times w' \neq \varnothing$ и $g \times w'\mu'(q'') = \varnothing$. Для упрощения записи алгоритма введем частичную функцию $\psi : V' \to V$ соотношениями: $\psi(q_0) = h$ и для любого $w \in \mathrm{T}(D_x)$ положим $\psi(q_0 \times w) = h \times w$. Для наглядности мы будем считать, что в процессе работы алгоритма вершины графа D_x могут быть белыми, серыми и черными.

Алгоритм 2. *Диагностический эксперимент.*

Вход. СД-граф G, граф D, МА установлен в неизвестную ему вершину $h \in V$.

Выход. Множество Q_x.

Метод.

1. Считать метку $\mu(h)$. Пусть $\mu(h) = x$. Положить $F = \varnothing$.

2. Выбрать из графа $\left\langle \sum_{g\in V} D_g \right\rangle$ компоненту D_x.

3. Для всех $q \in V'$ положить $\mathrm{color}[q] =$ БЕЛЫЙ. Пометить все хорды остова $T(D_x)$ как неисследованные.

4. Положить $\mathrm{color}[q_0] =$ СЕРЫЙ и $F = F \cup \{q_0\}$.

5. Если $|Q_x| = 1$, то вершина h уже определена. Алгоритм прекращает работу.

6. Положить $t = \mathrm{head}[F]$ и $F = F \setminus \{t\}$. Перейти в вершину $\psi(t)$.

7. Если $\psi(t) = \varnothing$, то положить $Q_x = Q_x \setminus Q(t)$, удалить из D_x вершину t и все инцидентные ей ребра и перейти к п. 5.

8. Положить $\mathrm{color}[t] =$ ЧЕРНЫЙ и $Q_x = Q_x \setminus \widetilde{Q}(t)$.

9. Если $|Q_x| = 1$, то перейти к п. 5.

10. Для всех $s \in Q_t$ если $\mathrm{color}[s] =$ БЕЛЫЙ, то положить $\mathrm{color}[s] =$ СЕРЫЙ и $F = F \cup \{s\}$.

11. Если вершине t инцидентна неисследованная хорда (t, s) и $\mathrm{color}[s] =$ ЧЕРНЫЙ, то перейти к п. 12, иначе перейти к п. 5.

12. Если $\psi(t) \times \mu'(t)\mu'(s) = \varnothing$, то положить $Q_x = Q_x \setminus Q(t, s) \setminus \widetilde{Q}(t, s)$, удалить из D_x ребро (t, s) и если $|Q_x| = 1$, то перейти к п. 5, иначе перейти к п. 11.

13. Перейти в вершину $\psi(t)\times\mu'(t)\mu'(s)$, оставить в ней маркер и вернуться в вершину $\psi(t)$.

14. Перейти в вершину $\psi(s)$ по образам ЧЕРНЫХ вершин графа D_x.

15. Если маркер обнаружен, то положить $Q_x = Q_x \setminus \tilde{Q}(t,s) \setminus \hat{Q}(t,s)$, пометить (t,s) как исследованную хорду, подобрать маркер, вернуться в вершину $\psi(t)$ и если $|Q_x| = 1$, то перейти к п.5, иначе перейти к п.11.

16. Положить $Q_x = Q_x \setminus Q(t,s) \setminus \tilde{Q}(t,s)$, удалить из D_x ребро (t,s), перейти в вершину $\psi(t)\times\mu'(t)\mu'(s)$, подобрать маркер, вернуться в вершину $\psi(t)$ и если $|Q_x| = 1$, то перейти к п. 5, иначе перейти к п. 11.

Анализ алгоритма 3 начнем со следующей теоремы.

Теорема 5. По окончании работы алгоритма 3 множество Q_x всегда содержит единственную вершину.

Доказательство. Предположим, что на некоторой итерации алгоритма $|Q_x| > 1$ и $F = \varnothing$, т.е. условие окончания алгоритма не выполнено, но его дальнейшее продолжение невозможно. Пусть $Q_x = \{g, h\}$, где $g \neq h$. Из определения графа D_x, что для любой вершины $g \in V \setminus \{h\}$ выполняется $S_g \cap D_x \not\cong S_h \cap D_x$. Следовательно, имеет место, по крайней мере, одно из утверждений:

1) существует вершина q графа $S_h \cap D_x$ или его ребро (q', q''), в т.ч. $h \in Q(q)$ и $g \in \tilde{Q}(q)$ или $h \in Q(q', q'')$ и $g \in \tilde{Q}(q', q'') \cup \hat{Q}(q', q'')$;

2) существует вершина q графа $S_g \cap D_x$ или его ребро (q', q''), в т.ч. $g \in Q(q)$ и $h \in \tilde{Q}(q)$ или $g \in Q(q', q'')$ и $h \in \tilde{Q}(q', q'') \cup \hat{Q}(q', q'')$.

Пусть выполняется утверждение 1. По условию $F = \varnothing$. Следовательно, вершины q, q' и q'' уже были удалены из F. Тогда вершина g должна уже быть удалена из Q_x. Полученное противоречие доказывает теорему.

В наихудшем случае выполнение Алгоритма 2 будет сведено к обходу в ширину графа S_h. Следовательно, временная сложность Алгоритма 3 равна $O(n^2)$.

Заключение

В работе решена задача различения вершин топологической модели (помеченного неорграфа) операционной среды мобильного агента. С этой целью введены топологические идентификаторы вершин, на их основе построены диагностические эксперименты и разработаны стратегии их реализации на модели. Найдены оценки сложности соответствующих алгоритмов. В дальнейшем предполагается распространить понятие топологических идентификаторов на более широкие классы графов и разработать на их основе эффективные эксперименты с этими графами.

Литература

1. James A. Anderson. Automata Theory with Modern Applications / James A. Anderson. – Cambridge University Press, 2006. – 255 p.
2. Droste M. Handbook of Weighted Automata / Droste M., Kuich W., Vogler H. – Springer, New York, 2009. – 608 p.

3. Dudek G. Computational Principles of Mobile Robotics / G. Dudek, M. Jenkin. – Cambridge University Press, Cambridge, 2000. – 280 p.
4. Dudek G. Map Validation and Robot Self-Location in a Graph-Like World / G. Dudek, M. Jenkin, E. Milios, D. Wilkes // Robotics and Autonomous Systems. – 1997. – Vol. 22, № 2. – P. 159-178.
5. Грунский И.С. Анализ поведения конечных автоматов / Грунский И.С. – Луганск : Изд-во Луганск. гос. пед. ун-та, 2003. – 318 с.
6. Lewitt T. Qualitative navigation for mobile robot / T. Lewitt, D.T. Lawton // Artificial Intelligence. – 1990. – Vol. 40. – P. 306-360.
7. Сапунов С.В. Неотличимость вершин помеченных графов / С.В. Сапунов // Труды ИПММ. – 2008. – Т. 16. – С. 179-189.
8. Сапунов С.В. Определение положения робота в топологической среде / С.В. Сапунов // Искусственный интеллект. – 2008. – № 4. – С. 558-565.
9. Грунский И.С. Идентификация вершин помеченных графов / И.С. Грунский, С.В. Сапунов // Труды ИПММ. – 2010. – Т. 20. – С. 86-97.
10. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ / Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. – М. : МЦНМО, 2001. – 960 с.
11. Харари Ф. Теория графов / Харари Ф. – М. : Мир, 1973. – 303 с.

Literatura

1. James A. Anderson. Cambridge University Press, 2006. 255 p.
2. Droste M. Springer, New York. 2009. 608 p.
3. Dudek G. Cambridge University Press, Cambridge. 2000. 280 p.
4. Dudek G. Robotics and Autonomous Systems. Vol. 22, № 2. 1997. P. 159-178.
5. Grunsky I.S. Lugansk : Lugansk University Press. 2003. 318 p.
6. Lewitt T. Artificial Intelligence. Vol. 40. 1990. P. 306-360.
7. Sapunov S.V. Studies of IPMM. Vol. 16. 2008. P. 179-189.
8. Sapunov S.V. Artificial Intelligence. Vol. 4. 2008. P. 558-565.
9. Grunsky I.S. Stidies of IPMM. Vol. 20. 2008 P. P. 86-97.
10. Kormen T. Moscow : MCNMO. 2001. 960 p.
11. Harary F.Moscow : Mir. 1973. 303p.

І.С. Грунський, С.В. Сапунов

Діагностування місцезнаходження мобільного робота на підставі топологічної інформації щодо середовища

Розглянуто задачу визначення автономним мобільним роботом (МР) свого місцезнаходження у середовищі, що моделюється за допомогою графа з позначеним вершинами. МР зчитує позначки поточної вершини та її околу. Він може пересуватися ребрами графа від вершини до вершини, залишати маркер у поточній вершині, а також знаходити і підбирати маркер у разі його знаходження у поточній вершині. У роботі запропоновано поліноміальні методи побудови і реалізації експериментів з визначення початкового місцезнаходження МР, тобто початкової вершини графа. Ці методи ґрунтуються на перевірці ізоморфізму підграфів, які породжено уявними початковими вершинами.

I.S. Grunsky, S.V. Sapunov

Location Diagnostics of the Mobile Robots on the Basis of the Topological Information on the Environment

The problem of self-localization of a mobile agent (MA) in an environment modeled by a graph with labeled vertices is considered. This problem is actual in connection with problems of navigation of autonomous mobile robots. MA reads labels of the current vertex and its neighborhood. It can move along the edges of the graph from vertex to vertex. In addition MA can drop the pebble at the vertex or pick up the pebble that it has previously dropped at the vertex. We propose construction and realization methods for experiments on the recognition of MA initial position on graph. These methods are based on checking the isomorphism of subgraphs generated by hypothetical initial vertices.

Статья поступила в редакцию 19.04.2011.